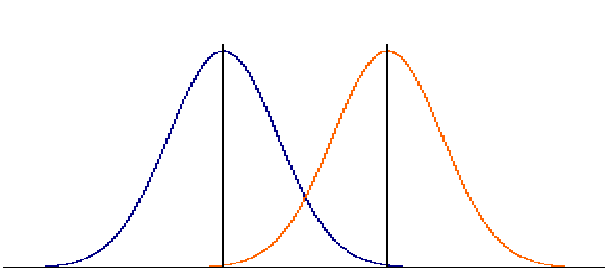
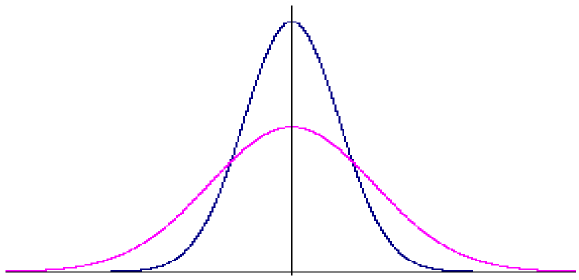
TEMA Nº 3 → ANÁLISIS DE DATOS PARAMÉTRICOS PARA DISEÑOS DE DOS GRUPOS

TIPOS DE MUESTRAS

Muestras independientes: *n_1 y n_2 muestras de sujetos diferentes, extraídos aleatoriamente de sus respectivas poblaciones.*
Muestras relacionadas: *se trata de los mismos n sujetos observados en condiciones experimentales diferentes, o n pares de sujetos semejantes entre sí (gemelos, hermanos,...)*

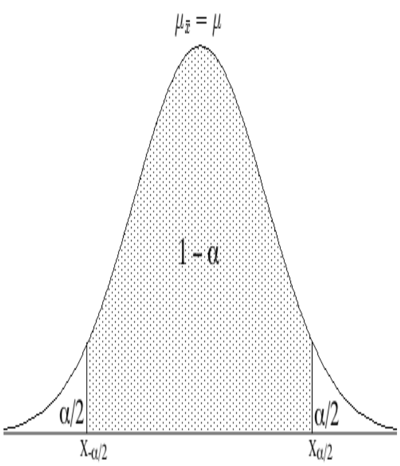
CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES

Poblaciones normales N (0, 1)	
 *Medias distintas y varianzas iguales*	 *Medias iguales y varianzas distintas*

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

SOBRE DOS MEDIAS (PARAMÉTRICOS)	***VARIANZAS POBLACIONALES CONOCIDAS***
	VARIANZAS POBLACIONALES DESCONOCIDAS Y SUPUESTAMENTE IGUALES
	VARIANZAS POBLACIONALES DESCONOCIDAS Y SUPUESTAS DISTINTAS
SOBRE DOS MEDIANAS (NO PARAMÉTRICOS)	***TEST DE MANN-WHITNEY-WILCOXON***
SOBRE DOS VARIANZAS	***DIFERENCIA DE VARIANZAS***
SOBRE DOS PROPORCIONES	***DIFERENCIA PROPORCIONES VALOR IGUAL A CERO***
	DIFERENCIA PROPORCIONES VALOR DISTINTO DE CERO

Pasos para realizar el contraste de hipótesis:



1. *Establecer los* ***supuestos.***
2. *Formular las* ***hipótesis estadísticas***
3. *Elección del* ***estadístico de contraste*** *apropiado*
4. ***Regla de decisión*** *(la distribución muestral del estadístico nos permite fijar los valores críticos que determinan la zona de rechazo de la H_0). El cálculo del estadístico de contraste nos permite también la determinación del nivel crítico p (probabilidad de que, siendo cierta la H_0, obtengamos unos datos como los observados en la muestra). También podemos utilizar el intervalo de confianza.*
5. ***Conclusión*** *(rechazamos o no la H_0 a partir del nivel crítico p, o del valor o los valores críticos)*
6. ***Interpretación*** *(en el contexto de la investigación)*

CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA DOS MEDIAS

Supuestos	➢ **Observaciones independientes** ➢ **Nivel de medida de intervalo o razón** ➢ **Distribuciones normales en la población ó ($n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$)**		
Hipótesis (Iguales en los Tres casos)	**Varianzas población conocidas**	**Desconocidas Supuestamente iguales (homocedasticidad)**	**Desconocidas Supuestamente distintas**
	C. Bilateral $H_0: \mu_1-\mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$	**C. Unilateral Derecho** $H_0: \mu_1-\mu_2 \leq 0$ $H_1: \mu_1-\mu_2 > 0$	**C. Unilateral Izquierdo** $H_0: \mu_1-\mu_2 \geq 0$ $H_1: \mu_1-\mu_2 < 0$
Estadístico de Contraste	$\dfrac{X_2 - X_1 - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_2^2}{n_2} + \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right)}}$	$T = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)\hat{S}_1^2 + (n_2-1)\hat{S}_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$	$T' = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \dfrac{\hat{S}_2^2}{n_2}}}$
Distribución Muestral	**Normal Tipificada** **N (0, 1)**	**"t" de Student** **$gl = n_1 + n_2 - 2$**	$g.l. = \dfrac{\left(\dfrac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \dfrac{\hat{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{\hat{S}_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \dfrac{\left(\dfrac{\hat{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$
Regla decisión	**Conocida (Z) o desconocida (t) la varianza de la población (valor o valores críticos)** **(C. Bilateral) → $t \leq t_{\alpha/2;\, n-2}$ y $t \geq t_{1-\alpha/2;\, n-2}$ // $Z \leq Z_{\alpha/2}$ y $Z \geq Z_{1-\alpha/2}$** **(C. Unilateral Izquierdo) $t \leq t_{\alpha;\, n-2}$ // $Z \leq Z_{\alpha}$** **(C. Unilateral Derecho) $t \geq t_{1-\alpha;\, n-2}$ // $Z \geq Z_{1-\alpha}$** **Nivel crítico p → Se rechaza H_0 si $p < \alpha$ y se acepta si $p > \alpha$**		

PROBLEMAS EJEMPLO (CH diferencia de Medias)

Dos centros de Educación Especial vienen utilizando, desde hace dos años, métodos diferentes para estimular las funciones superiores de los niños con retraso mental. El director de uno de los centros sostiene que su método (Método A) logra mejores resultados que el del otro centro (Método B). Para estudiar esta cuestión, fijamos α = 0,03, extraemos aleatoria e independientemente dos muestras de niños, una en cada centro (n_A = 120 y n_B = 50) y les medimos el cociente intelectual (CI) en una escala de intervalo. Los niños de ambos centros iniciaron el programa de estimulación con un CI medio igual a 70 y los CI medios tras el programa fueron 79 para los niños estimulados con el método A y 74 para los estimulados con el método B. La distribución de los CI es normal en las poblaciones con σ_A = 18 y σ_B = 12 y todas las observaciones son independientes entre sí.

Supuestos: *Se trata de contrastar las medias de dos muestras independientes* ***(varianzas poblacionales conocidas);*** *Distribución Normal de los CI en ambas poblaciones; Variable dependiente medida a nivel de intervalo.*

Hipótesis*: Planteamos un contraste unilateral derecho (queremos probar si el método A es más eficaz)*

H_0: $\mu_A - \mu_B \leq 0$ **H_1: $\mu_A - \mu_B > 0$** *También →* **H_0: $\mu_A \leq \mu_B$** **H_1: $\mu_A > \mu_B$**

Estadístico de contraste: *Conocidas las varianzas poblacionales.*

*$Z = (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) / \sqrt{(\sigma^2_1 / n_1) + (\sigma^2_2 / n_2)} \rightarrow Z = (79 - 74) / \sqrt{(324 / 120) + (144 / 50)} =$ **2,12***

Sigue una distribución Normal tipificada N (0, 1)

Regla de decisión:

Valores críticos *(para un nivel de confianza del 97% y un contraste unilateral, el valor crítico es → $Z_{0'97}$ = (1´88)*
Nivel crítico p *(el estadístico de contraste 2´12 se asocia a una probabilidad p = P (Z ≥ 2,12) → 1 – 0,983 = 0,017*

Conclusión: *Se rechaza H_0 [el estadístico de contraste 2´12 > 1´88 (valor crítico) y también p = 0,017 (nivel crítico) < α = 0,03 (nivel de significación)].*

Interpretación: *El programa de estimulación del CI ha sido eficaz con un nivel de confianza del 97% (mejor el método A que el método B)*

Intervalo de confianza: *Para realizarlo suponemos que se trata de un contraste bilateral; por tanto, habría que reformular las hipótesis:*

$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \pm | Z_{\alpha/2} | \cdot$ *Error típico → Límite superior y Límite inferior*

(79 – 74) ± (0,03/2 = Z (-2´17) · 2,36 (denominador e. contraste) = 5 ± 5´12 → (- 0´12 y 10´12)

Decisión: Aceptamos H_0 (el intervalo de confianza contiene el valor 0, luego asumimos que la diferencia de medias en la población puede tomar ese valor

---

En una investigación psicopedagógica se pasó la misma prueba de nivel de lectura a dos grupos de niños: los participantes habían sido elegidos de forma aleatoria de entre los alumnos de EGB de dos provincias españolas. Los datos se muestran en la tabla. La variable se midió en una escala de intervalo y se supone que $\sigma^2_A = \sigma^2_B$

	TAMAÑO	**MEDIA**	**VAR. INSESGADA**
PROVINCIA A	**121**	**40**	**7**
PROVINCIA B	**61**	**38**	**6**

Supuestos: *Disponemos de dos muestras independientes (dos grupos de niños) que se someten a una prueba de lectura. La variable dependiente medida a nivel de intervalo.* ***Varianzas poblacionales desconocidas y supuestamente iguales ($\sigma^2_A = \sigma^2_B$).*** *Muestras grandes (121 y 61).*

Contraste las hipótesis para las medias (muestras independientes)

Hipótesis: *Planteamos un contraste bilateral para ver si las diferencias se deben al azar.*

(H_0: $\mu_A - \mu_B = 0$ y H_1: $\mu_A - \mu_B \neq 0$) // También → H_0: $\mu_A = \mu_B$ y H_1: $\mu_A \neq \mu_B$)

Estadístico de contraste: *Aplicamos el E. de Contraste para la diferencia de medias. Desconocidas las varianzas de la población (supuestamente iguales) :*

$T = (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)$ / *Error típico* → $T = (40 - 38) / 0{,}408 = \mathbf{4{,}90}$

$$\text{Error típico} = \sqrt{[(n_1 - 1)\ S^2_1 + (n_2 - 1)\ S^2_2 / (n_1 + n_2 - 2)] \cdot (1 / n_1) + (1 / n_2)}$$

$$\text{Error típico} = \sqrt{0'1665} = 0{,}408$$

Sigue una distribución t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Regla de decisión:

Valores críticos *(tabla t de Student con 121 + 61 – 2 = 180 grados de libertad y α = 0,05). Se trata de un contraste bilateral y son muestras grandes; por tanto, utilizamos $Z_{0´025}$ (- 1´96) y $Z_{0´975}$ = (1´96)*
Nivel crítico p *(el estadístico de contraste 4´90 se asocia a una probabilidad < 0´0005 que es más pequeña que α)*

Conclusión: *Rechazamos H_0 (el estadístico de contraste 4´90 no está entre los valores críticos ± 1´96 y de igual forma, considerando el nivel p crítico, $p < \alpha$)*

Interpretación: *El rendimiento medio en la prueba de lectura no es igual en los dos grupos con un nivel de significación α = 0,05.*

Intervalo de confianza:

$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \pm | t_{\alpha\,(n1 + n2 - 2)} | \cdot$ **Error típico =** *(Límites inferior y superior)*

(40 – 38) ± 1´96 · 0´408 = 2 ± 0´8 = (1´2 y 2´08) → Rechazamos H_0 (el intervalo de confianza no contiene el valor 0, luego asumimos que la diferencia de medias en la población no puede tomar ese valor)

Distintos estudios muestran que la relajación es eficaz para reducir la ansiedad precompetitiva. Siguiendo esta línea de investigación y habiendo hipotetizado una reducción de la ansiedad en las escaladoras tratadas con relajación, extraemos aleatoria e independientemente 12 escaladoras y les asignamos aleatoriamente a las dos condiciones del experimento: la mitad de las escaladoras se somete a un programa de relajación durante seis meses y la otra mitad no realiza ningún tipo de relajación (suponemos que las poblaciones se distribuyen normalmente con distinta varianza). Al finalizar el programa de relajación, medimos la ansiedad precompetitiva de todas las escaladoras, obteniendo una ansiedad media de 8 y una varianza insesgada de 150 en el grupo "sin relajación" y una ansiedad media de 6´5 y una varianza sesgada de 100 en el grupo "con relajación". El nivel de significación alfa se fijó en 0,05, la variable dependiente está medida a nivel de intervalo y a mayor puntuación mayor ansiedad. ¿Podemos afirmar que realmente la ansiedad precompetitiva de las escaladoras se reduce utilizando técnicas de relajación?

Supuestos: *12 escaladoras en un experimento con dos condiciones: 6 escaladoras "sin relajación" y 6 "con relajación". Variable dependiente (ansiedad) medida a nivel de intervalo. Poblaciones con distribución normal →* ***Contraste de hipótesis para dos muestras Independientes*** *(desconocidas las varianzas poblacionales y supuestas distintas)*

Hipótesis: *Siguiendo a los investigadores planteamos un contraste unilateral derecho.*

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \; //// \; \text{También} \rightarrow H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \;\; y \;\; H_1: \mu_1 > \mu_2)$$

Estadístico de contraste: *Contraste de medias, desconocidas las varianzas (supuestas distintas)*

$$T = (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) / \text{Error típico} \rightarrow \mathbf{(8 - 6´5) / 6´23 = 0´24}$$

Donde → Error típico = $\sqrt{\hat{S}^2_1 / n_1 + \hat{S}^2_2 / n_2}$

Cálculos adicionales (Medias y Varianzas insesgadas) →

$\bar{Y}_{SR} = 8$ $\quad \hat{S}^2_{SR} = 150$ *(insesgada)* $\quad \bar{Y}_R = 6{,}5$ $\quad \hat{S}^2_R = 83$ *(insesgada)*

Donde → $S^2_R = 100$ *(sesgada) = (5 / 6) · 100 → 83*

Error Típico de la diferencia → $\sqrt{150 / 6 + 83 / 6} \rightarrow \sqrt{25 + 13´83} = 6´23$

$$g.l. = \frac{\left(\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\hat{S}_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{\hat{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$	$gl = \frac{(150/6 + 83/6)^2}{[(150/6)^2/(6-1) + (83/6)^2/(6-1)]} =$ $gl = 1507'77 / 163'27 =$ **$9'23 \approx 9$** (valor < $t = n_1 + n_2 - 2$)

Regla de decisión:

*Valor crítico para α = 0,05 → Según la tabla t de Student (contraste unilateral derecho), **con 9 gl** encontramos el valor → $t_{9;\,0'05} = 1'833$*

Nivel crítico p → el valor del E. Contraste T = 0´24, con 9 gl se encuentra entre $0'55 < p < 0'60$

***Conclusión e interpretación**: Se acepta H_0 para un nivel de confianza del 95%. Según el valor crítico (contraste unilateral derecho) T (0´24) < 1´833 → Aceptamos H_0.*

Según el nivel p crítico ($0'55 < p < 0'60$) > que el valor de α = 0,05. La ansiedad precompetitiva de las escaladoras no disminuye utilizando técnicas de relajación.

CONTRASTES DE HIPÓTESIS DOS MEDIANAS (TEST DE MANN-WHITNEY-WILCOXON)

Supuestos	➢ ***Variable dependiente con un nivel de medida ordinal o superior*** ➢ ***Dos poblaciones con distribuciones similares (misma forma) en la población***
Hipótesis	***C. Bilateral*** $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ***C. Unilateral Derecho*** $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ ***C. Unilateral Izquierdo*** $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$
Estadístico Contraste	***1.- Asignamos rangos a todas las puntuaciones (muestra 1 y muestra 2) como si formaran un único grupo.*** ***2.- Calculamos las sumas de rangos para las puntuaciones procedentes de cada una de las muestras (S_1 para la primera muestra y S_2 para la segunda muestra)*** ***3.- Calculamos los siguientes valores:*** $U_1 = S_1 - \tfrac{1}{2} n_1 (n_1 + 1)$ // $U_2 = S_2 - \tfrac{1}{2} n_2 (n_2 + 1)$ ***El estadístico de contraste "U" es el menor de U_1 ó U_2***
Distribución Muestral	***Utilizamos la tabla U de Mann-Whitney-Wilcoxon***
Regla decisión	***Conocida (Z) o desconocida (t) la varianza de la población (valor o valores críticos)*** ***(C. Bilateral)*** → $U > u_{n1,\, n2;\, \alpha/2}$ ***(C. Unilateral Izquierdo)*** → $U < u_{n1,\, n2;\, \alpha}$ ***(C. Unilateral Derecho)*** → $U > u_{n1,\, n2;\, \alpha}$ ***Nivel crítico p → Se rechaza H_0 si $p < \alpha$ y se acepta si $p > \alpha$***
Aproximación A la Normal	$Z = \frac{(U_i) - [(n_1 \cdot n_2)/2]}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)/12}}$

PROBLEMA EJEMPLO

En una investigación de Psicología Social sobre valores, se han extraído dos muestras aleatorias de personas. Una muestra se extrajo de una región del interior de la Península (n=5) y la otra de la costa (n=6). Los participantes cumplimentaron un cuestionario de xenofobia, que ofrece puntuaciones en una escala ordinal, obteniendo los resultados que se presentan en la Tabla 1 (a mayor puntuación mayor xenofobia). Se desea saber si la tendencia central de los habitantes de la costa es más baja que la de los del interior. Se asume que las distribuciones de la variable en las dos poblaciones tienen la misma forma (si difieren sólo lo hacen en su tendencia central)

Interior	***6***	***14***	***10***	***18***	***20***	
Costa	***16***	***12***	***4***	***8***	***2***	***22***

Supuestos: *Se trata de dos muestras independientes (personas de la península y personas de la costa). Puntuaciones del cuestionario en escala ordinal. Las distribuciones de la VD en las poblaciones tienen la misma forma y, si difieren, lo hacen sólo en su tendencia central.*

Hipótesis*: La hipótesis nula siempre es aquella que afirma lo contrario de lo que el investigador desea probar. Desea probar que la tendencia central (contraste no paramétrico, mediana) en habitantes de la costa es menor que en habitantes del interior. Contraste unilateral izquierdo*

Hipótesis de la que parte el investigador → $H_1: \eta_C < \eta_P$
Hipótesis nula (negación de la anterior) → $H_0: \eta_C \geq \eta_P$

Estadístico de contraste:

1º.- *Ordenamos el total de las puntuaciones de menor a mayor (puntuaciones de interior en negrita)*

2	*4*	***6***	*8*	***10***	*12*	***14***	*16*	***18***	***20***	*22*

2º.- *Asignamos rangos (vemos que no hay empates):*

2	*4*	***6***	*8*	***10***	*12*	***14***	*16*	***18***	***20***	*22*
1	*2*	***3***	*4*	***5***	*6*	***7***	*8*	***9***	***10***	*11*

3º.- Sumamos los rangos de cada grupo: Rangos de interior (negrita) $S_1 = 3+ 5+ 7+ 9 +10 = 34$
Rangos de costa $S_2 = 1+2+4+6+8+11 = 32$

4º.- Aplicamos las fórmulas del estadístico de contraste (U):
$U_1 = S_1 - ½ n_1 (n_1 + 1) \rightarrow U_1 = 34 – (2´5 \cdot 6) = 19$
$U_2 = S_2 - ½ n_2 (n_2 + 1) \rightarrow U_2 = 32 – (3 \cdot 7) = 11$

Elegimos como estadístico de contraste el valor inferior de U **(**$U_2 = 11$**)**

Regla de decisión:

Si consideramos como estadístico de contraste la suma de rangos, el estadístico de contraste es W = 34 (se elige la muestra $_1$ *porque es la que tiene menor número de sujetos. El nivel crítico p del estadístico W de MWW se encuentra en la Tabla A.7 → buscamos* $n_1 = 5$ *y* $n_2 = 6$*. El nivel crítico es el valor de probabilidad que tiene nuestro estadístico muestral. Como W = 34, vemos que p = 0.268*

Conclusión*: Dado que el nivel crítico p (0´268) es mayor que α (0´05) → Aceptamos* H_0

Interpretación: *Las distribuciones del interior y las de la costa no difieren en cuanto a las medianas en sus apreciaciones sobre la xenofobia.*

CONTRASTES DE HIPÓTESIS DOS PROPORCIONES

Supuestos	➢ ***Observaciones independientes*** ➢ ***Variable dependiente dicotómica o dicotomizada*** ➢ ***$n \geq 30$***	
Hipótesis	***C. Bilateral*** $H_0: \pi_1 - \pi_2 = D$ $H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq D$	***C. Unilateral Derecho*** $H_0: \pi_1 - \pi_2 \leq D$ $H_1: \pi_1 - \pi_2 > D$ ***C. Unilateral Izquierdo*** $H_0: \pi_1 - \pi_2 \geq D$ $H_1: \pi_1 - \pi_2 < D$

Estadístico Contraste	***D = 0*** $Z = (P_1 - P_2) - 0 / \sqrt{P\ (1 - P) \cdot (1 / n_1) + (1 / n_2)}$ Donde $P = (n_1 \cdot P_1) + (n_2 \cdot P_2) / (n_1 + n_2)$	***D ≠ 0*** $Z = (P_1 - P_2) - \lambda. / \sqrt{P_1\ (1 - P_1) / n_1 + P_2 (1 - P_2) / n_2}$
Distribución Muestral	***Normal tipificada N (0, 1)***	
Regla decisión	***Conocida (Z) o desconocida (t) la varianza de la población (valor o valores críticos)*** ***(C. Bilateral)*** → $Z \leq Z_{\alpha/2}$ y $Z \geq Z_{1-\alpha/2}$ ***(C. Unilateral Izquierdo)*** → $Z \leq Z_{\alpha}$ ***(C. Unilateral Derecho)*** → $Z \geq Z_{1-\alpha}$ ***Nivel crítico p → Se rechaza H_0 si $p < \alpha$ y se acepta si $p > \alpha$***	
Intervalo confianza	$(P_1 - P_2) \pm \mid Z\alpha \mid \cdot$ ***Error típico =*** *(Límites inferior y superior)*	

PROBLEMAS EJEMPLO

El grado de dificultad de las preguntas de un test se suele medir por el número de los sujetos que los aciertan, o más exactamente, por la proporción de aciertos. Para averiguar si dos preguntas de un determinado test de aptitud general difieren en dificultad, hemos seleccionado una muestra aleatoria simple de 200 sujetos y los hemos repartido aleatoriamente en dos grupos de 100. Un grupo de sujetos ha respondido a la pregunta 1 y el otro a la pregunta 2. La pregunta 1 la han acertado 70 sujetos y la 2 la han acertado 60. El nivel de significación α se fijó en 0,05.

Supuestos: *Tenemos una muestra aleatoria de n = 200 sujetos, repartidos en dos grupos independientes de 100 (cada uno responde a una pregunta y se considera el acierto o el error → variable dicotómica). Se fija α = 0,05. Se dan los supuestos para realizar un* ***Contraste de Proporciones*** *al comparar el grado de dificultad de las dos preguntas del test.*

Hipótesis: *Planteamos un contraste bilateral para ver si las preguntas difieren en dificultad.*

$$H_0: \pi_1 = \pi_2 \ // \ H_1: \pi_1 \neq \pi_2$$

Estadístico de contraste: *La hipótesis se establece sobre una diferencia nula D = 0)*

$Z = (P_1 - P_2) / \sqrt{P\ (1 - P) \cdot (1 / n_1) + (1 / n_2)}$ *// Donde* $P = (n_1 \cdot P_1) + (n_2 \cdot P_2) / (n_1 + n_2)$

*Cálculos previos: Aciertos → **G_1 = 70 / 100 = 0,7** / **G_2 = 60 / 100 = 0,6***

$P = (n_1 \cdot G_1) + (n_2 \cdot G_2) / (n_1 + n_2)$ → (100 · 0,7) + (100 · 0,6) / (100 + 100) = 0,65

$Z = (0{,}7 - 0{,}6) / \sqrt{0{,}65\ (1 - 0{,}65)\ \cdot (1/100) + (1/100)} = \mathbf{1{,}48}$

Sigue una distribución Normal tipificada N (0, 1)

<u>Regla de decisión</u>:

***Valores críticos** (para un nivel de confianza del 95% y un contraste bilateral, los valores críticos son → ± 1´96 → $Z_{0´025}$ (- 1´96) y $Z_{0´975}$ = (1´96)*
Nivel crítico p** [el estadístico de contraste (Z = 1,48) en la tabla de la curva normal deja por debajo 0,9306] → Probabilidad (Z ≥ 1,48) = 1 - 0,9306 = 0,0694; al ser bilateral → 2 · 0,069 = **0,1388.

***<u>Conclusión</u>**: Aceptamos H_0 (el estadístico de contraste **1´48** está entre los valores críticos **± 1´96** y de igual forma, considerando el nivel p crítico, p (0´1388) > α (0´05)*

***<u>Interpretación:</u>** Para un nivel de confianza del 95%, aceptamos la hipótesis nula (las preguntas no difieren en dificultad)*

***<u>Intervalo de confianza</u>**: **(P_1 – P_2) ± I Zα I · Error típico =** (Límites inferior y superior)*

(0,7 – 0,6) ± 1´96 · 0´067 = (- 0´03 y 0´23)

Aceptamos H_0 (el intervalo de confianza contiene el valor 0, luego asumimos que la diferencia de medias en la población puede tomar ese valor)

CONTRASTES DE HIPÓTESIS DOS VARIANZAS

Supuestos	➢ **Variable dependiente con un nivel de medida de intervalo o razón** ➢ **Dos poblaciones con variables distribuidas normalmente ó $n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$**
Hipótesis	**C. Bilateral** $H_0: \sigma^2_1 / \sigma^2_2 = 1$ $H_1: \sigma^2_1 / \sigma^2_2 \neq 1$ **C. Unilateral Derecho** $H_0: \sigma^2_1 / \sigma^2_2 \leq 1$ $H_1: \sigma^2_1 / \sigma^2_2 > 1$ **C. Unilateral Izquierdo** $H_0: \sigma^2_1 / \sigma^2_2 \geq 1$ $H_1: \sigma^2_1 / \sigma^2_2 < 1$
Estadístico Contraste	$F = S^2_1 / S^2_2$ **Donde** $S^2_1 \geq S^2_2$ **(varianzas insesgadas)**
Distribución Muestral	**Distribución Muestral F de Fisher** **con gl numerador = (n_1 – 1) gl y gl denominador = (n_2 – 1)**
Regla decisión	$F \leq f_{\alpha/2}$ y $F \geq f_{1-\alpha/2}$ (C. Bilateral) $F \geq f_{1-\alpha}$ (C. Unilateral Derecho) $F \leq f_{\alpha}$ (C. Unilateral Izquierdo)
Intervalo confianza	$(f_{\alpha/2\,;\, n1-1\, y\, n2-1}) \cdot \hat{S}^2_1 / \hat{S}^2_2 < \sigma^2_1 / \sigma^2_2 < (f_{1-\alpha/2\,;\, n1-1\, y\, n2-1}) \cdot \hat{S}^2_1 / \hat{S}^2_2$

PROBLEMAS EJEMPLO

Deseamos contrastar si las pacientes anoréxicas (PA) son más variables, en cuanto a su nivel de estrés, que las pacientes bulímicas (PB). Para ello, extraemos dos muestras aleatorias de dichas pacientes y se obtienen los siguientes datos sobre su nivel de estrés (donde a mayor puntuación mayor estrés), considere $\alpha = 0{,}05$:

PA	4 6 8 12 16
PB	3 5 7 9 14

Sabemos que la variable "nivel de estrés" está medida a nivel de intervalo y distribuida normalmente en ambas poblaciones.

Supuestos: Disponemos de dos muestras independientes, la variable dependiente medida a nivel de intervalo y dos poblaciones con variables normalmente distribuidas → Se trata de un **contraste de varianzas para dos muestras independientes.**

Hipótesis: H_0: $\sigma^2_{PA} / \sigma^2_{PB} \leq 1$ y H_1: $\sigma^2_{PA} / \sigma^2_{PB} > 1$. Contraste Unilateral Derecho.

También → H_0: $\sigma^2_{PA} \leq \sigma^2_{PB}$ y H_1: $\sigma^2_{PA} > \sigma^2_{PB}$

Estadístico de contraste: $F = \hat{S}^2_1 / \hat{S}^2_2$ → Donde $\hat{S}^2_1 \geq \hat{S}^2_2$ (varianzas insesgadas)

Distribución Muestral F de Fisher con $(n_1 - 1)$ gl y $(n_2 - 1)$ gl

PA	PB	PA^2	PB^2	
4	3	16	9	
6	5	36	25	$F = \hat{S}^2_1 / \hat{S}^2_2$
8	7	64	49	
12	9	144	81	$F = 23{,}2 / 17{,}8 = 1{,}3$
16	14	256	196	
$\Sigma = 46$	$\Sigma = 38$	$\Sigma = 516$	$\Sigma = 360$	

Media $_{PA} = 46 / 5 = 9{,}2$ $\quad$ $\hat{S}^2_1 = (516 / 5) - 9{,}2^2 \cdot (5 / 4) = 23{,}2$
Media $_{PB} = 38 / 5 = 7{,}6$ $\quad$ $\hat{S}^2_2 = (360 / 5) - 7{,}6^2 \cdot (5 / 4) = 17{,}8$

Regla de decisión: Valor crítico → $f_{0,05;\ 4\ y\ 4\ gl} = 6{,}39$

Conclusión e interpretación: No se rechaza H_0 porque 1,3 (estadístico de contraste) < 6,39 (valor crítico). Por tanto, las pacientes anoréxicas (PA) no son más variables que las bulímicas (PB) en cuanto a su nivel de estrés considerando un nivel de confianza del 95%.

Intervalo de confianza (para poder realizarlo suponemos contraste bilateral):

$$(f_{\alpha/2\ ;\ n1-1\ y\ n2-1}) \cdot \hat{S}^2_1 / \hat{S}^2_2 < \sigma^2_1 / \sigma^2_2 < (f_{1-\alpha/2\ ;\ n1-1\ y\ n2-1}) \cdot \hat{S}^2_1 / \hat{S}^2_2$$

$$0{,}10) \cdot (23{,}2 / 17{,}8) = \mathbf{0{,}13} < \sigma^2_1 / \sigma^2_2 < (9{,}60) \cdot (23{,}2 / 17{,}8) = \mathbf{12{,}48}$$

Siendo los valores críticos: $f_{0,025;\ 4\ y\ 4\ gl} = 9{,}60$ y $f_{0,975;\ 4\ y\ 4\ gl} = 1 / 9{,}60$ → 0,10 (**propiedad recíproca**).

Decisión: Como la H_0 debe plantear que las varianzas son iguales ($\sigma^2_1 / \sigma^2_2 = 1$) y apreciamos que uno está dentro del intervalo de confianza (0,13 y 12,48). Se aceptaría la H_0 (las varianzas de ambas poblaciones son iguales)

TAMAÑO (MAGNITUD) DEL EFECTO

La magnitud o tamaño del efecto alude al índice que mide el efecto que tiene un tratamiento. Deben estar implicados al menos dos grupos (el experimental y el control). Es independiente del tamaño muestral.

$$\textbf{Índice } d = \frac{|Y_{TRATAMIENTO} - Y_{CONTROL}|}{\sqrt{[(n_1 - 1)\hat{S}^2_1 + (n_2 - 1)\hat{S}^2_2 / (n_1 + n_2 - 2)]}}$$

***Según Cohen** (1988) → Magnitud del efecto [pequeño (d = 0´2); mediano (d = 0´5) y grande (d = 0´8 o superior)*

***<u>Problema ejemplo</u>:** En un equipo de baloncesto se desea contrastar la eficacia del entrenamiento psicológico en los tiros libres, por lo que se seleccionaron aleatoriamente 5 jugadores, a los que se entrenó técnica y psicológicamente, que fueron comparados con los otros 5, a los que sólo se entrenó técnicamente. El porcentaje de mejora a lo largo de la temporada aparece en la siguiente tabla:*

ENTRENAMIENTO PSICOLÓGICO	***37***	***14***	***38***	***43***	***35***
ENTRENAMIENTO TÉCNICO	***29***	***36***	***11***	***17***	***13***

<u>Supuestos</u>:** Disponemos de dos muestras independientes con n = 5 para contrastar la eficacia de un tipo de entrenamiento (el psicológico). Datos en porcentaje de mejora → **Comprobar la magnitud del efecto.

PSICOLÓGICO		***TÉCNICO***	
X	***X^2***	***Y***	***Y^2***
37	***1369***	***29***	***841***
14	***196***	***36***	***1296***
38	***1444***	***11***	***121***
43	***1849***	***17***	***289***
35	***1225***	***13***	***169***
Σ = 167	***Σ = 6083***	***Σ = 106***	***Σ = 2716***

DATOS INSESGADOS

MEDIA $_{PSICOLÓGICO}$ = 167 / 5 = 33,4
MEDIA $_{TÉCNICO}$ = 106 / 5 = 21,2

VARIANZA $_{PSIC}$ = (6083 / 5) – $33,4^2$ = 101,04 · (5/4) = 126,3
VARIANZA $_{TÉCN}$ = (2716 / 5) – $21,2^2$ = 93,76 · (5/4) = 117,2

T = MEDIA $_{PSIC}$ - MEDIA $_{TÉCN}$ = (33,4 – 21,2) = 12,2

Error Típico = $\sqrt{(4 \cdot 126{,}3) + (4 \cdot 117{,}2) / (5+5-2)}$ = 9

d = 12,2 / 9 = 1,35 → (0´9115)

La d = 1´35 es la distancia estandarizada entre las medias de los dos grupos y su probabilidad asociada (0´9115) → El 91´15% de los sujetos con entrenamiento psicológico mejoran respecto a los que únicamente reciben entrenamiento técnico.